Sebastián Martín Ruiz

Aplicaciones de la Función de Smarandache y las Funciones Prima y Coprima

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2(E(n\log n)+1)} \left[1 - E\left[\frac{\sum_{j=2}^{k} \left[1 + E\left[- \frac{\sum_{s=1}^{j} (E(j/s) - E((j-1)/s)) - 2}{j} \right] \right]}{n} \right] \right]$$

American Research Press
Rehoboth
2002

Sebastián Martín Ruiz
Avda. de Regla, 43, Chipiona 11550 (Cádiz) Spain
smaranda@teleline.es
smruiz@telefonica.net
www.telefonica.net/c/smruiz

American Research Press
Rehoboth
2002

Este libro puede pedirse en papel impreso en:

Books on Demand
ProQuest Information & Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road
P.O. Box 1346, Ann Arbor
MI 48106-1346, USA
Tel.: 1-800-521-0600 (Customer Service)
http://wwwlib.umi.com/bod/

y está en internet en:
Publishing Online, Co. (Seattle, Washington State)
http://PublishingOnline.com

Revisores:

José Andrés Armario Sampalo, armario@us.es,
Doctor en Matemáticas, y profesor titular del departamento de Matemática aplicada de la Universidad de Sevilla.

Antonio Pérez Sanz, aperez4@platea.pntic.mec.es,
Profesor del I.E.S. Salvador Dalí (Madrid).

Pedro Real Jurado, real@us.es,
Doctor en Matemáticas, y profesor titular del departamento de matemática aplicada de la Universidad de Sevilla.

Muchos libros pueden ser bajados de internet en la dirección:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: 1-931233-51-9

Depósito legal: 297-5092
Impreso en los Estados Unidos de América

Contenidos:

Capítulo 1: La Función de Smarandache Aplicada a los Números Perfectos - 4

Capítulo 2: Un Resultado Obtenido Para la Función de Smarandache - 6

Capítulo 3: Una Congruencia con la Función de Smarandache - 10

Capítulo 4: Una Recurrencia Para Obtener los Números Primos Usando la Función Prima de Smarandache - 14

Capítulo 5: El Término General de la Sucesión de los Números Primos y la función Prima de Smarandache - 17

Capítulo 6: Expresiones de la Función Coprima de Smarandache - 20

Capítulo 7: Nuevos Números Primos - 22

Capítulo 1: La Función de Smarandache Aplicada a los Números Perfectos.

La función de Smarandache se define como sigue:

S(n)= es el menor entero positivo tal que S(n)! es divisible por n. [1]

En este artículo vamos a ver cual es el valor que toma esta función cuando n es un número perfecto de la forma $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$, $p = 2^k - 1$, siendo p un número primo.

Lema 1: Sea $n = 2^i \cdot p$ siendo p un primo impar e i un entero tal que:

$$0 \le i \le E\left(\frac{p}{2}\right) + E\left(\frac{p}{2^2}\right) + E\left(\frac{p}{2^3}\right) + \cdots + E\left(\frac{p}{2^{E(\log_2 p)}}\right) = e_2(p!)$$

donde $e_2(p!)$ es el exponente de 2 en la descomposición factorial de $p!$.
E(x)=$\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x.

Tenemos que $S(n) = p$.

Demostración:
Dado que $GCD(2^i, p) = 1$ (GCD=Máximo común divisor=MCD) tenemos que $S(n) = \max\{S(2^i), S(p)\} \ge S(p) = p.$ Por tanto $S(n) \ge p.$
Si probamos que p! es divisible por n entonces tendremos la igualdad.

$$p! = p_1^{e_{p1}(p!)} \cdot p_2^{e_{p2}(p!)} \cdots p_s^{e_{p_s}(p!)}$$

donde p_i es el $i-ésimo$ primo en la descomposición factorial de $p!$. Está claro que $p_1 = 2,\ \ p_s = p,\ \ e_{p_s}(p!) = 1$ por lo que:

$$p! = 2^{e_2(p!)} \cdot p_2^{e_{p2}(p!)} \cdots p_{s-1}^{e_{p_{s-1}}(p!)} \cdot p$$

De donde se deduce que :

$$\frac{p!}{n} = 2^{e_2(p!)-i} \cdot p_2^{e_{p2}(p!)} \cdots p_{s-1}^{e_{p_{s-1}}(p!)}$$

es un entero positivo, pues $e_2(p!) - i \geq 0$.

Por tanto se tiene que $S(n) = p$.

Proposición 1: Si n es un número perfecto de la forma $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ con k un entero positivo tal que, $2^k - 1 = p$ es primo, tenemos que $S(n) = p$.

Demostración:

Por el lema es suficiente probar que $k - 1 \leq e_2(p!)$.
Si probamos que:

$$k - 1 \leq 2^{k-1} - \frac{1}{2} \qquad (1)$$

habremos probado la proposición ya que:

$$k - 1 \leq 2^{k-1} - \frac{1}{2} = \frac{2^k - 1}{2} = \frac{p}{2}$$

Como $k - 1$ es entero, tenemos que $k - 1 \leq E\left(\frac{p}{2}\right) \leq e_2(p!)$

Probar (1) es lo mismo que probar $k \leq 2^{k-1} + \frac{1}{2}$,pero como k es entero, esto es equivalente a probar $k \leq 2^{k-1}$ (2).

Para probar (2) vamos a considerar la función: $f(x) = 2^{x-1} - x$ x número real.

Esta función tiene derivada y su derivada es $f'(x) = 2^{x-1} \ln 2 - 1$.

f será creciente si $2^{x-1} \ln 2 - 1 > 0$, y resolviendo x:

$$x > 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} \cong 1'5287$$

En particular f es creciente $\forall\, x \geq 2$.

Por tanto $\forall\, x \geq 2$ $f(x) \geq f(2) = 0$ es decir $2^{x-1} - x \geq 0$ $\forall x \geq 2$.

Por lo cual: $2^{k-1} \geq k$ $\forall k \geq 2$ entero.

Y esto prueba la proposición.

EJEMPLOS:

$6 = 2 \cdot 3$	S(6)=3
$28 = 2^2 \cdot 7$	S(28)=7
$496 = 2^4 \cdot 31$	S(496)=31
$8128 = 2^6 \cdot 127$	S(8128)=127

Referencias:

[1] C. Dumitrescu and R. Müller: To Enjoy is a Permanent Component of Mathematics. SMARANDACHE NOTIONS JOURNAL Vol. 9 No 1-2, (1998) pp 21-26

Capítulo 2: Un Resultado Obtenido Para la Función de Smarandache

Ya definimos la función de Smarandache como sigue:
S(m)=Es el menor entero positivo tal que S(m)! es divisible por m. [1]
Vamos a ver que valor toma esta función para $m = p^{p^n}$ con n un entero, $n \geq 2$ y p un número primo. Previamente se requiere un Lema.

Lema 1 $\forall \quad m,n \in \mathrm{N} \quad m,n \geq 2$

$$m^n = E\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m}\right] + E\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^2}\right] + \cdots + E\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^{E\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right]}}\right]$$

donde E(x) es el mayor entero menor o igual que x.

Demostración:

Vamos a ver en primer lugar el valor que toma $E\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right]$.
Si $n \geq 2$: $m^{n+1} - m^n + m < m^{n+1}$ y por tanto
$\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right) < \log_m m^{n+1} = n+1$.
Y si $m \geq 2$:
$mm^n \geq 2m^n \Rightarrow m^{n+1} \geq 2m^n \Rightarrow m^{n+1} + m \geq 2m^n \Rightarrow m^{n+1} - m^n + m \geq m^n$
$\Rightarrow \log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right) \geq \log_m m^n = n \Rightarrow E\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] \geq n$

De donde se deduce que: $n \leq E\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] < n+1$ y por lo cual:

$$E\left[\log_m\left(m^{n+1} - m^n + m\right)\right] = n \quad si \;\; n,m \geq 2$$

Ahora vamos a ver los valores que toma para $1 \leq k \leq n$: $E\left[\dfrac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right]$

$$E\left[\frac{m^{n+1} - m^n + m}{m^k}\right] = E\left[m^{n+1-k} - m^{n-k} + \frac{1}{m^{k-1}}\right]$$

Si k=1: $E\left[\dfrac{m^{n+1}-m^{n}+m}{m^{k}}\right]=m^{n}-m^{n-1}+1$

Si $1<k\leq n$: $E\left[\dfrac{m^{n+1}-m^{n}+m}{m^{k}}\right]=m^{n+1-k}-m^{n-k}$

Veamos cuanto vale la suma total:

k=1	m^n	$-m^{n-1}$	…	…	…	…	+1		
k=2		m^{n-1}	$-m^{n-2}$						
k=3			m^{n-2}	$-m^{n-3}$					
.				.					
.				.					
.				.					
k=n-1					m^2	$-m$			
k=n						m	-1		

Por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n}E\left[\frac{m^{n+1}-m^{n}+m}{m^{k}}\right]=m^{n}\qquad m,n\geq 2$$

Proposición: $\forall\ \ p$ *número primo* $\forall n\geq 2$:

$$S(p^{p^{n}})=p^{n+1}-p^{n}+p$$

Demostración:

Consideremos $e_p(k!)=$exponente del número p en la descomposición factorial de k!.

Tenemos:

$$e_p(k!)=E\left(\frac{k}{p}\right)+E\left(\frac{k}{p^2}\right)+E\left(\frac{k}{p^3}\right)+\cdots+E\left(\frac{k}{p^{E(\log_p k)}}\right)$$

Y usando el lema se tiene:

$$e_p\left[\left(p^{n+1}-p^n+p\right)!\right]=E\left[\frac{p^{n+1}-p^n+p}{p}\right]+E\left[\frac{p^{n+1}-p^n+p}{p^2}\right]+\cdots+E\left[\frac{p^{n+1}-p^n+p}{p^{E\left[\log_p\left(p^{n+1}-p^n+p\right)\right]}}\right]=p^n$$

Por tanto:

$$\frac{\left(p^{n+1}-p^n+p\right)!}{p^{p^n}}\in \mathrm{N} \quad and \quad \frac{\left(p^{n+1}-p^n+p-1\right)!}{p^{p^n}}\notin \mathrm{N}$$

Y por último tenemos el resultado:

$$S\left(p^{p^n}\right)=p^{n+1}-p^n+p$$

Referencias:

[1] C. Dumitrescu and R. Müller: To Enjoy is a Permanent Component of Mathematics. SMARANDACHE NOTIONS JOURNAL VOL 9:, No. 1-2 (1998) pp 21-26.

Capítulo 3: Una Congruencia con la Función de Smarandache

La función de Smarandache se define como sigue:

S(n)= es el menor entero tal que S(n)! es divisible por n. [1]

En este artículo vamos a ver el valor que toma $S(2^k - 1) \pmod k$

para los enteros k comprendidos entre: $2 \le k \le 97$.

k	$S(2^k-1)$	$S(2^k-1) \pmod k$
2	3	1
3	7	1
4	5	1
5	31	1
6	7	1
7	127	1
8	17	1
9	73	1
10	31	1
11	89	1
12	13	1
13	8191	1
14	127	1
15	151	1
16	257	1
17	131071	1
18	73	1
19	524287	1
20	41	1
21	337	1
22	683	1
23	178481	1
24	241	1
25	1801	1
26	8191	1
27	262657	1
28	127	15
29	2089	1
30	331	1

k	$S(2^k-1)$	$S(2^k-1)$ (mod k)
31	2147483647	1
32	65537	1
33	599479	1
34	131071	1
35	122921	1
36	109	1
37	616318177	1
38	524287	1
39	121369	1
40	61681	1
41	164511353	1
42	5419	1
43	2099863	1
44	2113	1
45	23311	1
46	2796203	1
47	13264529	1
48	673	1
49	4432676798593	1
50	4051	1
51	131071	1
52	8191	27
53	20394401	1
54	262657	1
55	201961	1
56	15790321	1
57	1212847	1
58	3033169	1
59	3203431780337	1
60	1321	1
61	2305843009213693951	1
62	2147483647	1
63	649657	1
64	6700417	1
65	145295143558111	1
66	599479	1
67	761838257287	1
68	131071	35

k	$S(2^k-1)$	$S(2^k-1)$ (mod k)
69	10052678938039	1
70	122921	1
71	212885833	1
72	38737	1
73	9361973132609	1
74	616318177	1
75	10567201	1
76	525313	1
77	581283643249112959	1
78	22366891	1
79	1113491139767	1
80	4278255361	1
81	97685839	1
82	8831418697	1
83	57912614113275649087721	1
84	14449	1
85	9520972806333758431	1
86	2932031007403	1
87	9857737155463	1
88	2931542417	1
89	618970019642690137449562111	1
90	18837001	1
91	23140471537	1
92	2796203	47
93	658812288653553079	1
94	165768537521	1
95	30327152671	1
96	22253377	1
97	13842607235828485645766393	1

Se ve claramente en la tabla que solo hay 4 excepciones para $2 \leq k \leq 97$

Veamos en detalle las 4 excepciones de la tabla:

$k=28=2^2\cdot 7$	$S(2^{28}-1)=15 \pmod{28}$
$k=52=2^2\cdot 13$	$S(2^{52}-1)=27 \pmod{52}$
$k=68=2^2\cdot 17$	$S(2^{68}-1)=35 \pmod{68}$
$k=92=2^2\cdot 23$	$S(2^{92}-1)=47 \pmod{92}$

Observamos que en estos 4 casos se tiene que $k=2^2p$ siendo p un primo y más aun $S(2^k-1) \equiv \frac{k}{2}+1 \pmod{k}$

Cuestión Irresuelta:

¿Podemos obtener una fórmula general que nos dé, en función de k, el valor $S(2^k-1) \pmod{k}$ para todos los valores enteros positivos de k?.

Referencias:

[1] Smarandache Notions Journal Vol. 9, No. 1-2, (1998) pp 21-26.

Capítulo 4:Una Recurrencia Para Obtener los Números Primos Usando la Función Prima de Smarandache.

Teorema: Consideremos la función:

Para n un entero positivo:

$$F(n) = n + 1 + \sum_{m=n+1}^{2n} \prod_{i=n+1}^{m} \left\lfloor - \left\lfloor - \frac{\sum_{j=1}^{i} \left(\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i-1}{j} \right\rfloor \right) - 2}{i} \right\rfloor \right\rfloor$$

se tiene: $p_{k+1} = F(p_k)$ para todo $k \geq 1$ donde $\{p_k\}_{k \geq 1}$ son los números primos y $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

Se observa que el conocimiento de p_{k+1} solo depende del conocimiento de p_k y el conocimiento de los primos anteriores es innecesario.

Demostración:

Supongamos que hemos encontrado una función $P(i)$ con la siguiente propiedad:

$$P(i) = \begin{cases} 1 \; si \; i \; es \; compuesto \\ 0 \; si \; i \; es \; primo \end{cases}$$

Esta función es llamada Función Prima de Smarandache (Ref.).

Consideremos el siguiente producto:

$$\prod_{i=p_k+1}^{m} P(i)$$

Si $p_k < m < p_{k+1}$ $\prod_{i=p_k+1}^{m} P(i) = 1$ ya que $i : p_k + 1 \leq i \leq m$ son todos compuestos.

Si $m \geq p_{k+1}$ $\prod_{i=p_k+1}^{m} P(i) = 0$ ya que $P(p_{k+1}) = 0$

Por tanto la suma:

$$\sum_{m=p_k+1}^{2p_k} \prod_{i=p_k+1}^{m} P(i) = \sum_{m=p_k+1}^{p_{k+1}-1} \prod_{i=p_k+1}^{m} P(i) + \sum_{m=p_{k+1}}^{2p_k} \prod_{i=p_k+1}^{m} P(i) = \sum_{m=p_k+1}^{p_{k+1}-1} 1 =$$

$$= p_{k+1} - 1 - (p_k + 1) + 1 = p_{k+1} - p_k - 1$$

La segunda suma es cero ya que todos los productos tienen el factor $P(p_{k+1}) = 0$.

Por tanto tenemos la siguiente relación de recurrencia:

$$p_{k+1} = p_k + 1 + \sum_{m=p_k+1}^{2p_k} \prod_{i=p_k+1}^{m} P(i)$$

Veamos que podemos encontrar $P(i)$ con la propiedad pedida.

Consideremos:

$$\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i-1}{j} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & si \quad j \mid i \\ 0 & si \quad j\ no \mid i \end{cases} \qquad j = 1,2,\cdots,i \quad i \geq 1$$

Deducimos de esta relación:

$$d(i) = \sum_{j=1}^{i} \left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i-1}{j} \right\rfloor$$

donde $d(i)$ es el número de divisores de i.

Si i es primo $d(i)=2$ por tanto:

$$-\left\lfloor -\frac{d(i)-2}{i} \right\rfloor = 0$$

Si i es compuesto $d(i)>2$ por tanto:

$$0<\frac{d(i)-2}{i}<1 \Rightarrow -\left\lfloor -\frac{d(i)-2}{i} \right\rfloor = 1$$

De aquí se obtiene la función prima de Smarandache $P(i)$ que es:

$$P(i) = -\left\lfloor -\frac{\sum_{j=1}^{i}\left(\left\lfloor \frac{i}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i-1}{j} \right\rfloor\right)-2}{i} \right\rfloor \qquad i \geq 2 \quad \text{entero}$$

Con esto está probado el teorema.

Referencias:

[1] E. Burton, "Smarandache Prime and Coprime functions".
www.gallup.unm.edu/~Smarandache/primfnct.txt
[2]F. Smarandache, "Collected Papers", Vol II 200 p.p. 137, Kishinev University Press, Kishinev, 1997.

Capítulo 5: El Término General de la Sucesión de los Números Primos y la Función Prima de Smarandache.

Consideremos la función $d(i) =$ número de divisores de un número entero positivo i .Hemos encontrado la siguiente expresión para esta función:

$$d(i) = \sum_{k=1}^{i} E\left(\frac{i}{k}\right) - E\left(\frac{i-1}{k}\right)$$

“E(x) =Floor[x]”

Hemos probado esta expresión en el artículo anterior.

Deducimos de aquí la siguiente función:

$$G(i) = -E\left[-\frac{d(i)-2}{i}\right]$$

Esta función es llamada función prima de Smarandache (Referencias)
Toma los siguientes valores:

$$G(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i\ es \quad primo \\ 1 & si \quad i\ es \quad compuesto \end{cases}$$

Consideremos ahora $\pi(n) =$ número de números primos menores o iguales que n. Es simple probar que:

$$\pi(n) = \sum_{i=2}^{n} (1 - G(i))$$

Se tiene también que:

$$Si \quad 1 \le k \le p_n - 1 \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{\pi(k)}{n}\right) = 0$$
$$Si \quad C_n \ge k \ge p_n \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{\pi(k)}{n}\right) = 1$$

Veremos después que condiciones tiene que cumplir C_n.

Por tanto tenemos la siguiente expresión para p_n n-ésimo número primo:

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{C_n} (1 - E\left(\frac{\pi(k)}{n}\right))$$

si obtenemos C_n que solo dependa de n , esta expresión será el término general de la sucesión de los números primos, ya que π está en función de G y G está en función de d(i) que solo depende de i. Por tanto la expresión solo depende de n.

Consideremos $C_n = 2(E(n\log n) + 1)$
Ya que $p_n \approx n\log n$ se prueba fácilmente la desigualdad:

$$(1) \quad p_n \le 2(E(n\log n) + 1)$$

También es necesario que:

$$E\left[\frac{\pi(2(E(n\log n) + 1))}{n}\right] = 1$$

Si comprobamos la desigualdad:

$$(2) \quad \pi(2(E(n\log n) + 1)) < 2n$$

Obtenemos que:

$$\frac{\pi(C_n)}{n} < 2 \Rightarrow E\left[\frac{\pi(C_n)}{n}\right] \leq 1 \quad ; C_n \geq p_n \Rightarrow E\left[\frac{\pi(C_n)}{n}\right] = 1$$

He comprobado experimentalmente esta desigualdad y las diferencias tienden a crecer, por lo cual es cierta para todo n.

Por tanto si las desigualdades (1) y (2) son ciertas para todo n
Se tiene que el término general de la sucesión de los números primos es:

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{2(E(n\log n)+1)} \left[1 - E\left[\frac{\sum_{j=2}^{k}\left[1 + E\left[-\frac{\sum_{s=1}^{j}(E(j/s) - E((j-1)/s)) - 2}{j}\right]\right]}{n}\right]\right]$$

Referencias:

[1] E. Burton, “Smarandache Prime and Coprime Functions”
Http://www.gallup.unm.edu/~Smarandache/primfnct.txt
[2] F. Smarandache, “Collected Papers”, Vol. II, 200 p.,p.137, Kishinev University Press.

Capítulo 6: Expresiones de la Función Coprima de Smarandache

La función coprima de Smarandache se define de la siguiente forma:

$$C_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\begin{cases}0 & si \quad n_1,n_2,\cdots,n_k \quad son\ primos\ entre\ sí\\ 1 & \quad otro\ caso\end{cases}$$

Vamos a ver dos expresiones de la función coprima para k=2.

EXPRESIÓN 1:

$$C_2(n_1,n_2)=-\left\lfloor-\frac{n_1n_2-lcm(n_1,n_2)}{n_1n_2}\right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ =la parte entera de x.

Si n_1,n_2 son primos entre sí:

$lcm(n_1,n_2)=n_1n_2$ por tanto: $C_2(n_1,n_2)=-\left\lfloor\frac{0}{n_1n_2}\right\rfloor=0$

Si n_1,n_2 no son primos entre sí:

$$lcm(n_1,n_2)<n_1n_2 \Rightarrow 0<\frac{n_1n_2-lcm(n_1,n_2)}{n_1n_2}<1 \Rightarrow C_2(n_1,n_2)=1$$

EXPRESIÓN 2:

$$C_2(n_1,n_2)=1+\left\lfloor-\frac{\prod\limits_{\substack{d|n_1\\d>1}}\prod\limits_{\substack{d'|n_2\\d'>1}}|d-d'|}{\prod\limits_{d|n_1}\prod\limits_{d|n_2}(d+d')}\right\rfloor$$

Si n_1, n_2 primos entre si sus divisores cumplen : $d \neq d' \quad \forall d, d' \neq 1$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\prod_{\substack{d|n_1 \\ d>1}} \prod_{\substack{d'|n_2 \\ d'>1}} |d - d'|}{\prod_{d|n_1} \prod_{d|n_2} (d + d')} < 1 \Rightarrow C_2(n_1, n_2) = 0$$

Si n_1, n_2 no son primos entre sí se tiene: $\exists\, d = d' \quad d > 1, d' > 1 \Rightarrow C_2(n_1, n_2) = 1$

EXPRESIÓN 3:

Función Coprima de Smarandache para $k \geq 2$:

$$C_k(n_1, n_2, \cdots, n_k) = -\left\lfloor \frac{1}{GCD(n_1, n_2, \cdots, n_k)} - 1 \right\rfloor$$

Si $n_1, n_2, \cdots, n_k$ primos entre sí:

$$GCD(n_1, n_2, \cdots, n_k) = 1 \Rightarrow C_k(n_1, n_2, \cdots, n_k) = 0$$

Si $n_1, n_2, \cdots, n_k$ no son primos entre sí : $GCD(n_1, n_2, \cdots, n_k) > 1$

$$0 < \frac{1}{GCD} < 1 \Rightarrow -\left\lfloor \frac{1}{GCD} - 1 \right\rfloor = 1 = C_k(n_1, n_2, \cdots, n_k)$$

Referencias:

1. E. Burton, "Smarandache Prime and Coprime Function"
2. F. Smarandache, "Collected Papers", Vol II 22 p.p. 137,Kishinev University Press.

Capítulo 7: **Nuevos Números Primos**

Usando el programa PROTH de Yves Gallot he encontrado nuevos números primos de aproximadamente 3700 dígitos.
Este programa está basado en el siguiente teorema:

Teorema de Proth (1878):
Sea $N = k \cdot 2^n + 1$ donde $k < 2^n$. Si existe un número entero a tal que $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv -1 \pmod N$ se tiene que N es primo.

El programa Proth es un test de primalidad para grandes números de la forma $k \cdot b^n + 1$ o $k \cdot b^n - 1$. El programa está hecho para trabajar con números menores de 5.000000 de dígitos y está optimizado para número de aproximadamente 1000 dígitos.

Usando este programa he encontrado los siguientes números primos:

$3239 \cdot 2^{12345} + 1$	con 3720 dígitos	$a = 3, \quad a = 7$
$7551 \cdot 2^{12345} + 1$	con 3721 dígitos	$a = 5, \quad a = 7$
$7595 \cdot 2^{12345} + 1$	con 3721 dígitos	$a = 3, \quad a = 11$
$9363 \cdot 2^{12321} + 1$	con 3713 dígitos	$a = 5, \quad a = 7$

Dado que los exponentes de los tres primeros números es el número de Smarandache Sm(5)=12345, podríamos llamar a este tipo de números primos, números primos de Smarandache.

Por otro lado, ayudado del programa MATHEMATICA ,he encontrado nuevos números primos que son una variante de los números primos de Fermat. Son los siguientes:

$$2^{2^n} \cdot 3^{2^n} - 2^{2^n} - 3^{2^n} \text{ para n=1, 3, 4, 5, 7 .}$$

Es importante mencionar que para n=7 el número que se obtiene tiene 100 dígitos.

Chris Nash ha verificado los valores n=8 hasta n=20, este último tiene 815.951 dígitos, obteniendo que todos son compuestos. Todos tienen pequeños factores excepto n=13.

Referencias:

[1] Micha Fleuren, "Smarandache Factors and Reverse Factors", Smarandache Notions Journal, Vol. 10, 1999, www.gallup.unm.edu/~smarandache/
[2] Chris Caldwell, "The Prime Pages", www.utm.edu/research/primes

Biografía:

Nací en Chipiona el 16-05-64, provincia de Cádiz, España. Me licencié en matemáticas por la Universidad de Sevilla en 1991. Ese mismo año trabajé dando clases de matemática discreta en la facultad de informática de Sevilla. En 1992 comencé a trabajar en diversos institutos (high school) de las provincias de Sevilla y Cádiz. En 1996 publico mi primer artículo: "An algebraic identity leading to Wilson's theorem" en la revista "The Mathematical Gazette" de Inglaterra. A dicho artículo le han seguido otros 12 en la misma revista y en "The Smarandache Notions Journal" de "American Research Press". Actualmente sigo investigando, con ayuda de un colaborador, Azmy Ariff de Malasia, y trabajando en el instituto de Secundaria de mi localidad de nacimiento.

Un libro para los amantes de los números:
La función de Smarandache aplicada a los números perfectos, congruencias.
También, las funciones prima y coprima de Smarandache
en conexión con expresiones de los números primos.

$5.95